

# 成果公报

课题名称：《中学生数学学习障碍的研究与应用》

课题批准号：ABA11016

课题类别：重点课题

学科分类：数学

课题负责人：徐晓阳 中学高级教师 北京四中

主要成员：李岩 范兴亚 薛海龙 李京兰 王正 张文华

正文：

## 一、内容与方法

中学生数学学习障碍现象是当下中学数学学习中较为普遍的存在，几乎大多数中学生在数学学习方面都会有或多或少中学生数学学习障碍体验。课题组通过近5年的探索实践，对这一现象有了深刻的认识同时也总结出了一系列有效的干预措施。

关于“数感、运算、空间感、逻辑”干预研究中中学生数学学习障碍者是不是在数学知识方法的某个方面会有先天的缺陷呢？诸如先天就缺乏基础逻辑或基础空间直觉呢？为了找到答案，我们课题组先后分别在12.09---13.01和13.02---13.07两个学期内，在初中二年级精心挑选了在前面几次数学考试中得分均远低于平均分的20余名同学，开设了“有趣的数学”选修课。每次课都由我、薛海龙、李岩三位老师共同组织进行，或分组或合并，从数学学习开始对这些孩子的日常学习生活进行全方位地了解，随时也对一些学习习惯提出要求。在活动中我们很快通过一些具体问题的共性决定了几个活动方向：‘如何抓住课堂，提高课堂效率’的学习习惯干预计划、‘如何去理解概念’的定期数学概念讲述计划、‘如何提升逻辑思辨能力’的数独游戏训练计划、‘几何直觉能力培养提升’的手工折纸绘图计划，在‘有趣的数学’研讨班执着地执行了一年半，有些丰硕的结果。

## 二、结论与对策

国家课程课标中数学知识方法的学习难度不是造成当下中学生数学学习障碍的主要原因。尽管我们也承认“不是所有的数学知识方法都能被所有学生学会”的说法，但中学数学中“数感、数式运算、几何直觉、逻辑推理”等知识方法的

学习要求对绝大多数中学生来说没有困难。造成中学生数学学习障碍的主要原因还是来自学生的心理因素以及学习习惯等非智力因素。

就现象背后的成因，一方面我们可以从根本的层面去横向分析，具体思考应对解决问题。有哲学家说，自然科学的终点是数学、数学的终点是哲学，我们可以补一句：教育学的终点应该是心理学。尽管外在表象显效于具体知识方法缺陷、成绩不理想、信心不足，但诸多学困现象的深层又都有共通的心理特征，我们若把这些困相称作‘病症’的话，可以做如下的归结划分。

### “幻想依赖症候群”

“…做这些功课真没劲！先让我想想先干点什么呢？…嗯？时间怎么这么快就过去了，作业还没完成多少呢！…”这是当下许多学困者较为常态的一种现象描述。我们课题组调查的许多学困者都是被‘一段感觉心暖暖的遐想发呆’或‘不知目的的琐事’偷走了时间，成为了学困者，我们称之为‘幻想依赖症候群’。

按马斯洛的需求理论，先有自我实现才会有自我超越的需求。而现实中每个中学生原始的学习高峰体验都会源自目标完成后的成就感，若目标过远过大且不易实现就会使中学生心底产生一个强烈的对比冲击，引用访谈中孩子的话就是“理想中的愿景是那么美好惬意，但现实中的具体知识方法的理解巩固又是那么的冰冷无趣，…”访谈中有孩子谈到“…大人们总是把他们没有实现的理想目标加载在我们身上…”。诚然，我们每个人的成长中都会留下许多遗憾，所以一旦有了孩子，首先就想让自己的孩子补救这些遗憾。自我反省，自从 sen 出生起，我就象大多家长那样，经常给孩子树立美好的远大理想以激励孩子。

每个孩子各有各的不同，有些孩子久处于一个不能短期实现的理想目标中时，就会混淆了“美好的想象”与“现实”，经常会以‘我想的’代替‘我真实做到的’，久之又会产生一种低级逃避厌学现象，总是努力想法找偷懒借口‘不去做’，只是准备用‘只是我没去做’来辩解‘不是我做不到’。听起来似乎有些可笑，但这是当下中学生数学学习障碍者较为普遍的一种心理特征。一方面为什么要学习、怎么学习？目标方法一清二楚，但另一方面需落到实处真拼硬干时，立马打蔫发困提不起精神，或琐事缠身效率低下或发呆神游万里。这些孩子时常处于一种不自觉的迷茫中。我们课题组研究认为，远大美好的理想教育不适合所有孩子，过犹不及，处于低龄段的孩子越具体易实现的目标越利于孩子成长。对父母期望过高、家庭教育过严的孩子，在青春期里，面对繁重无趣的学业更易沉迷于幻想中，对此类学困者的干预更主要的是干预家长，引导孩子清醒地面对现实当下，制定具体易实现的学习目标以产生对学习的高峰体验，学会从日常平凡的小事中体会趣味。

我们认为，在学习中不能理清“懂”、“会”、“对”学习的三环节的人，也可广义地归属此类症候群。这类学困者的特征是：学习中以为听别人讲中没有产生疑惑就是学“懂”了，学“会”了，就会有好成绩了，而忽视学习数学如学习游泳，不能光靠去看而不去巩固践行。

### “懒惰拖延症候群”

生 NKM、YPF 等，聪明理解能力很强，课堂反馈很少有困难表现，就课堂上表现来说没有人认为他们会成为中学生数学学习障碍者的一员。深入调查，前者经常在放学前就抄袭作业或第二天早晨赶大早来抄作业，回家几乎从来不复习巩

固所学，没有督促则绝不会学习；后者稍好，并不太多地抄袭作业，但几乎从不主动及时梳理所学，除非妈妈亲自上阵一步步参与学习。我们归类为“懒惰拖延症”。这些孩子他们一方面明确知道自己有很多事情要做，但心底深处又有另一个自我不断诱使自己先玩会游戏、看会小说、或先发会呆什么的，…。很快时间就飞速溜走，清醒状态下非常懊悔，但明天面对具体任务时又会重复昨天的故事。我们课题组称此类孩子是“懒惰拖延症候群”。

必须得承认我们当下的学生比我们这代以及上一代人面对更多的诱惑。各种新娱乐方式、各种游戏机、各种新交流方式，最主要的各种款式品牌的‘智能手机’，它们在随时随地地诱惑着我们的孩子，且它们给孩子带来的高峰体验远远超过学习文化知识带来的高峰体验。可以说‘手机控’、‘游戏控’是造成当下中学生数学学习障碍的最主要因素。必须要承认在学习过程中，只有很少的孩子才能自制自己。有人会说，孩子形成良好的学习习惯即好，但学习习惯是理性压制住了惰性本能反抗，久之形成的结果<sup>4</sup>。及时地督促对青春期的绝大多数孩子来说都是必须的。

### “急躁、建功症候群”

“今日作业太多，我得做快点，写、快写…，嗯？好象有点问题，少考虑了一个条件！重来，…”这种现象在中学生数学学习障碍者中几乎是个普遍现象。急于求成，急功近利，图快盲目下笔导致的解题出错、表述中‘黑毛线团’满篇皆是答卷，几乎令当下所有老师挠头。这些学困者不知何时起就养成了一个非常糟糕的学习习惯，很多时候，尚未弄清题意，没弄清哪些是已知条件、哪些是未知条件，甚至还未弄清当下需要回答什么问题就已开始作答了；稍微综合点的题目，题设本身就有假象或所给条件维度多元、预设解题方法多元，被这些同学急躁来做，更是困难万千、疑云重重了，或是硬套一个方法假想一个条件一个结论来顽强论证，更是连篇累牍自己都不知所云了，自己归结为‘能力不足’，其实是做题习惯不良。“从概念出发”逐字逐句解析翻译题干的习惯培养就成了我们主要的干预努力方向。

这一症候群还有一个特征就是做题作业中更偏重于对结果，只要结果对了，其它过程表述什么的都不去关注了。造成的结果是，做小题（选填空题）偶然能得分，但变成解答题就必然失分了。这一困因的干预非常困难，因为造成这一困因有多方因素，从学生方面来讲，同学间的相互交流仅限于对答案，比分数，是从很小的年级就养成的习惯；从教师方面来讲，由于工作的辛苦，大多老师高效批阅作业的方法，也都是自觉不自觉地侧重从结论结果上去评判，而不自觉地忽视学生解题的表述过程细节；从家长方面来讲，随学习的难度和深度加大，家长们越来越难以完全看懂学生的思维过程了，一般也只会对照答案结合结论进行评判，对学习效果而言更是只注重结论和分数，大多绝不会去追问孩子在学习过程中是否有创造性表现。教师、家长的这些做法无疑均助长了这一中学生数学学习障碍之急躁症候的形成。我们认为从很大程度上这才是概念学习、数感、逻辑学习困难的真正原因。同时我们也统计发现了只有很少见的十分优秀的同学，才在彼此间交流数学问题的过程中做深层次讨论或创造性研究或涉及思维变式、问题变式。

针对此症候群，最有效的方法早已成四中多年的传统习惯，在家长层面入学伊始先与家长达成教育理念的共识，就学生层面努力使学生养成‘作业后作自检反思’的习惯，很简单但很有效，真是大道至简至易。

另一方面，我们可以从学生学习的层面去挖掘思考，从改变教学方式去有效规避造成新的中学生数学学习障碍。

我们通过了**综合学习情况调查，对比思考挖掘影响中学生数学学习的主要因素。**

研究假设

1.数学学习到高等数学运用阶段，对学习者的智商及先期的储备很依赖，但对于中学初等数学学习阶段，智商等因素对数学学习的影响不大，至少反映在通常的教学评价指标上，影响不大。

2.学生数学考试的成绩尽管不能完全说明学生的数学素质，但还是可以相对客观地反映出当下学生的数学学习状态及相对于所处群体的学业水平程度。成绩较好，说明当下数学学习发展处于良性状态，其综合学业水平也较高；若经常性地考试不及格，我们就认定他当下的数学学习状态没有处于良性发展阶段，当下学习能力学业水平不强，其数学学习潜能是被某些因素制约了的。

3.能通过中考考入北京四中，那说明他的综合学习能力包括数学学习能力水平在同龄人中是较高的，数学学习状态是处于良性发展状态的，从而我们课题组将我们四中高中部的新高一同学当做综合调查的优秀参照组，从我们初中部中抽取初二年级同学当做综合调查的一般参照组，我们从我校初二年级中经常数学考试不及格的最末尾 16 名同学就是我们的中学生数学学习障碍组。

研究过程

1.从数学学习的学习态度、学习习惯、学习环节（预习、听讲、复习巩固、作业、课下投入、报辅导班）等方面精心设计问题。

2.调查实施

我们分别调查了北京四中高一年级新生和初二年级（并从中特选了学习有困难的同学），其中高一年级作为数学学习优秀群组（编组为三组，有 499 人），初二年级作为一般群组（编组为二组，有 454 人），在初二年级长期考试不及格的同学中随机选取部分学生作为学困群组（编组为一组，有 16 人）。

3.结合反馈数据深入分析，得出

（一）课堂学习是学生获得数学知识的主渠道

（二）必要的教学设计是取得教学效果的关键

（三）对学困生可以通过精心设计的学习干预计划进行干预。

我们必须得承认，影响中学生数学学习的因素很多、很复杂，诸如：家庭遗传、个人智商、成长环境、目标兴趣、习惯意志力、...等等。但通过科学有效的方法手段进行教育活动，使所有的孩子的潜能都得以最大限度的开发，这是世界各国教育者共同的理想目标。通过调查数据，我们可以思考：到底什么因素才是学生学好数学的关键性因素呢？作为学校教师，什么是可以在日常工作时间内通过改变日常工作的观点举措就可避免造成中学生数学学习障碍。

### 三、成果与影响

5 年时间内，课题组首先通过对一组在学习上有较大问题的同学进行深度关注，通过深度交流、调查研讨，初步得出造成中学生数学学习障碍的成因。后续又两条腿走路，一方面课题组老师研究如何通过改变一些教学方式或精心设计一

些数学活动、设计关键点的教学,极大可能地规避造成新的中学生数学学习障碍;另一方面从小学5年级选定了一些对象进行持续5年的深度跟踪观察,进行科学地干预,通过今年中考的检验,结果令人欣慰。

课堂学习是学生获得知识的主渠道,不治已病治未病,防患于未然才是上策,提高课堂效率是有效规避产生新的中学生数学学习障碍的最佳举措。

**精彩的‘数学好算手’系列活动的尝试收获喜人。**我们课题组经研究确定,过难过重的课业负担和过于抽象的数学知识方法以不恰当的时机、方式引入都是造成中学生数学学习障碍的主要成因,立足于激发学生的学习兴趣,保护其学习积极性为目的,紧紧贴合正常的教学知识方法学习进度,并不降低难度但经过精心处理降低进入门槛,我们设计了一系列数学活动。“数学好算手”系列活动就是其中之一,内容包括因式分解、24点大乱斗、勾股拼图等,把它做成一种品牌,做成一种校园文化,既有督促学生落实的基本功比赛,又有锻炼学生思维的一些数学游戏,通过活动给予学生肯定,培养和调动他们的主动性,使更多的学生爱上数学,还可以根据学生在活动中的表现,调整教师上课的内容和方式,形成富有成效的教学设计。

类似的活动我们还尝试过数学嘉年华系列活动,用以整体促进同学们空间感和几何直觉。

**改进几何证明书写的教学尝试获学界肯定。**用推出格式进行几何证明教学在上面,我们已确认课堂是学生获得数学知识的主渠道,较为抽象的数学知识方法没有以恰当的方式和合适的时机引入是许多中学生数学学习障碍的主要成因。为此我们认真地进行每节课的教学设计。逻辑推理中的三段论说理对许多同学来说都是有障碍的,我们课题组通过分析以下中学数学学习中的常见现象,做了大胆的尝试及一些较长周期的联动计划,收效非常好。

**首先,我们确定了“命题间的推出关系理解对中学生数学学习障碍有影响”,**诸如【案例一】学生甲前年上初二,她很喜欢代数,不喜欢几何,问她为什么?她说:“代数好玩,计算、化简、列方程、解方程,折腾几下,自然就解出来了。”

“那你为什么不喜歡几何?”

“几何,不知是为什么?拿到题目没思路,考试时心里特别害怕。”

[我们看了她的试卷,代数全对,几何几乎题題都有毛病,有的甚至一点也没做,她不是不用功,就是不入门。]

我们分析了她的情况,没有思路的原因是:学过的几何知识抓不住,知识之间的逻辑关系更是说不清。我们请她的家长按照我们设计的办法(下面再讲)(i)帮助她对学过的几何内容进行了系统的整理;(ii)结合例子,讲解了怎么去寻找思路。后来没有思路的问题便解决了。命题间的推出关系是形成思路的重要基础,

正确运用推出关系是解题中避免失误的一个重要方面。因此，及早加强“学会推理”这条主线对于提高整个中学数学教与学的质量具有重要的意义。

**我们的对策：**把逻辑初步知识稍作改造，分成两段，前移到初中二年级和高中一年级

我们的做法如下：

**第一步，在初中二年级讲简单命题与命题间的推出关系**

先通过实例简介什么是命题，以及命题的真假，然后引出两个定义：

**定义 1** 已知两个命题 A 与 B，若 A 成立能得到 B 也成立，就说 A、B 具有推出关系（又称因果关系），记作  $A \Rightarrow B$ 。在这个推出关系中，A 是 B 的因（原因），B 是 A 的果（结果），因此  $A \Rightarrow B$  也可以写成“ $\because A$  成立， $\therefore B$  成立”。这实质上是由因导果<sup>②</sup>。

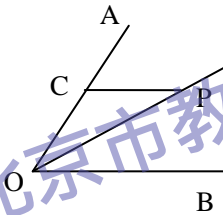
**定义 2** 若  $A \Rightarrow B$ ，且  $B \Rightarrow A$ （注意：这里 A 与 B 互为因果关系），称命题 A 与 B 逻辑等价，记作  $A \Leftrightarrow B$ 。

有了推出与逻辑等价的概念与符号，初中数学中的逻辑关系都能表述得一清二楚。

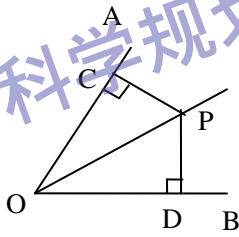
例如，学过角平分线的定义之后可以小结为：

$\angle AOP = \angle BOP = \frac{1}{2} \angle AOB$	$\Leftrightarrow$	射线 OP 是 $\angle AOB$ 的角平分线	$\Leftrightarrow$	OP 上任一点到角两 边的距离相等
--	-------------------	-------------------------------	-------------------	----------------------

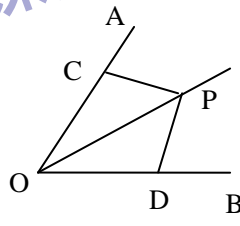
由此引申出多种添加辅助线的方法（如下图）：



①过点 P 作  $PC \parallel OB$ ，  
则  $\triangle POC$  为等腰三  
角形



②过点 P 作  $PC \perp$   
OA 于 C， $PD \perp OB$   
于 D，则  $PC = PD$



③在 OA、OB 上分别取点  
C、点 D，使得  $OC = OD$ ，  
则  $\triangle POC \cong \triangle POD$

这里从定义的条件到定义的结论，再到定义的性质，以及多种添加辅助线的方法，形成了一条知识的逻辑链，既形象直观，又好记好用。

**第二步，紧接着讲解寻找思路的三种方法**

所谓解题思路，实质上就是从已知条件到解答题目标的一连串的命题间的推出关系，即

$$\text{已知条件} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \mathbf{P} \\ \textcircled{2} \quad \mathbf{P} \\ \textcircled{3} \quad \mathbf{P} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1}' \\ \textcircled{2}' \quad \mathbf{P} \\ \textcircled{3}' \end{array} \right. \left. \right\} \mathbf{P} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{4} \end{array} \right\} \mathbf{P} \quad \text{解答题目标}$$

由此可以看出，熟练地掌握命题间的推出关系是形成思路的基础。因此，寻找思路就是从条件出发一环扣一环地寻找命题的推出关系，直至达到解答题目标，这种寻求思路的方法我们称之为“综合法”（就是由因导果的方法）。有了上面的

推出关系作基础，通过实例讲解这里的方法，既容易理解又容易掌握。

同理，再讲解寻找思路的“分析法”（就是执果索因的方法）与“综合分析法”。在解题时，若用“综合法”受阻，可试用另外两种方法。

学习了命题间的推出关系，紧接着学习三种推证通法，把两者有机的结合在一起，使这两个重点内容都化难为易。这样讲解平面几何非但不难，而且有趣，极大地提高了教学质量。

正是按照以上两步做法，我们对案例一中的初二学生进行了指导。首先帮助她把学过的几何知识用命题间的推出关系整理成了一个个知识串（这是推理的基础）。然后帮助她学会寻找思路的三种方法，这样就使她摆脱了“没有思路”的困扰，实现了从讨厌几何到喜欢几何的转变。

在初二级的课堂教学中，我们用以上的方法讲解平面几何，也取得了很好的效果。

例 1、如图 1， $\angle 1 = \angle 2$ ，P 为 BN 上一点，若  $\angle PCB + \angle PAB = 180^\circ$ ，求证：PA=PC。

师：怎么来证两条线段相等呢？

生：找一对全等三角形。

师：图中有没有全等三角形啊？

生：没有。

师：那我们就得想办法构造一对全等三角形。

利用  $\angle 1 = \angle 2$  怎么构造呢？

生：用角平分线的定义和性质，可以过点 P 作  $PE \perp AB$  于 E， $PD \perp BC$  于 D，如图 2，可以得到  $PE = PD$ ，那么只需证  $\triangle PAE \cong \triangle PCD$ 。

师：很好，条件够吗？

生：我们知道  $PE = PD$ ， $\angle PEA = \angle PDC = 90^\circ$ ，已知  $\angle PCB + \angle PAB = 180^\circ$ ，而  $\angle PAE + \angle PAB = 180^\circ$ ，因此可以知道  $\angle PCB = \angle PAE$ ，正好符合 AAS。

在学生分析的同时，我们在黑板上按照学生思考的顺序写成如下的推导思路：

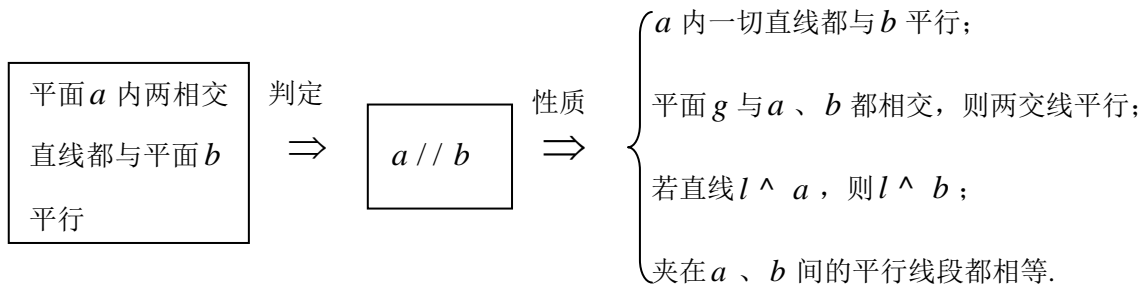
之后，按照这里的思路写出了证明过程。

### 第三步 高中阶段的巩固与发展

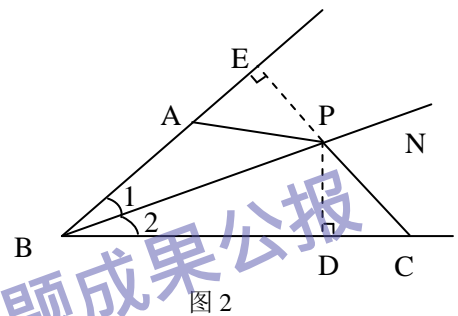
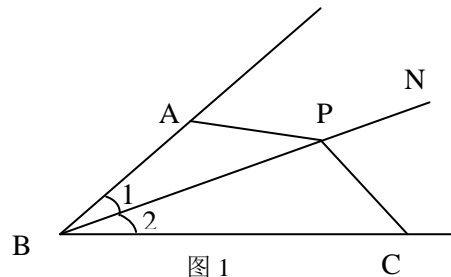
在高中“逻辑初步”安排在必修（一）集合单元之后，讲解复合命题及其真假、四种命题的关系与反证法。

这样高中数学中命题间的关系都可以用符号简捷形象地表示出来。

如



这就是说，这里有三个命题是逻辑等价的，其余两个都只是单向的推出关系。



这一点有好些高中学生也说不清楚。

我们把命题间的推出关系与三种论证通法结合讲解，使这两个重点内容相辅相成，相得益彰，生动有趣，而且特别可贵的是能从初中二年级抓起，这就大大加长了教育的时间段，极大地加强了“学会推理”这条主线的教学，是实现数学教育总目标的有力举措。同时，有了“推出”与“等价”这两个概念做基础，随着年级的提高，适时引入“推出变换”与“等价变换”这两个概念，这将进一步从理论上和实践上提升学生对变换的理解，学生学习数学的能力和解决问题的能力就会达到更高的层次。

营建高效课堂成为四中数学组的基本共识。

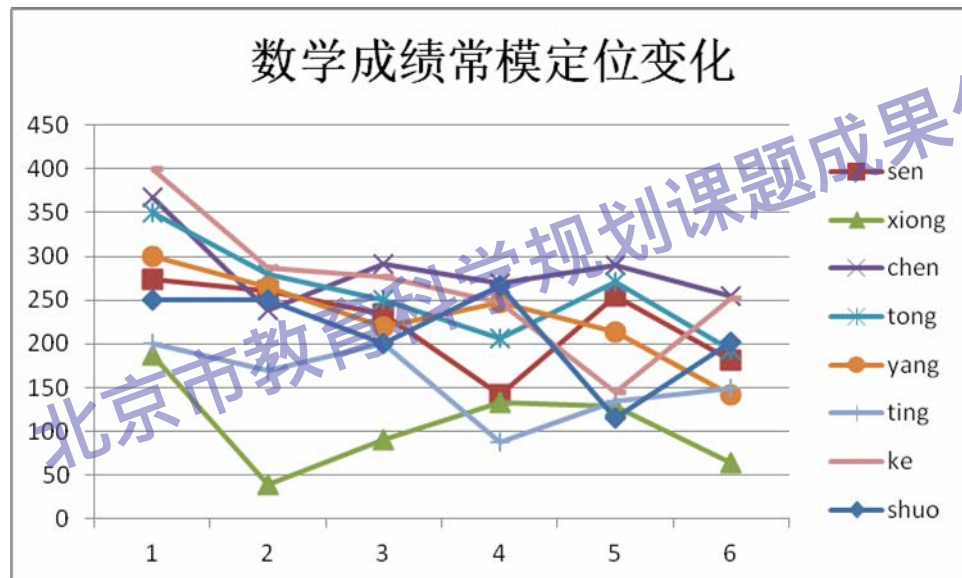
得出进行中学生数学学习障碍干预的五项基本原则：

一、**积极干预的原则**：数学老师看到学生数学学习的信念有动摇，就要积极干预，做肯定比不做强。信念：不管结果如何，首先我们自己要相信我们的努力工作是**有意义的**。

二、**平和、宽容、耐心期待的原则**

等待成长，给学生以足够的时间、空间（机会、时机、容错…）

守得云开见月明，下表是我们第三轮孩子的成绩变化



三、**真诚原则**

与干预对象间的以信任为目标的感情交流永远要放在一切工作的开始。

四、**及时督导原则**

不是每个人都会有坚定的自制力，一般学生都会面对惰怠的诱惑。

五、**场效应原则，关注学习的场效应**

教育效果达成的一个重要因素，适当的场合恰当的举措，若不关注‘场’效，特定场合下振聋发聩的教育大招在不适当的场合可能就成了学生听腻了的陈词滥调。

四、**改进与完善**

尽管最后这一组孩子的学业进步可以慰藉几个研究者的辛苦努力，但孩子们积极主动学习的努力程度还是令我们不满意，如何才能更系统更多地使孩子们体验到学习的高峰体验，进而达到马斯洛所说的人生的最高需求即自我超越的需

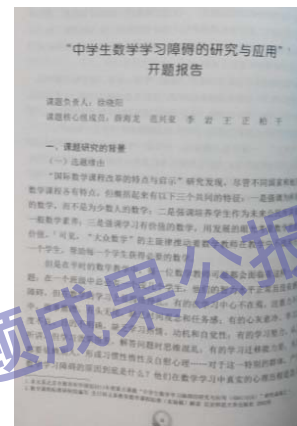
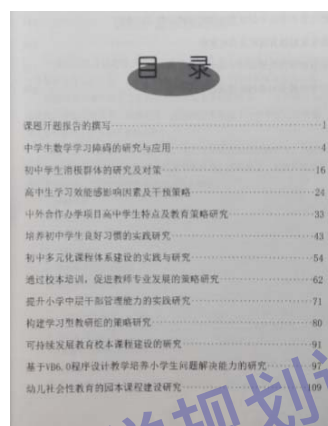


求，还需我们做更深入的探索实践，我们有信心再孩子们成长的高中阶段做出更欣喜的研究成果。

我们始终相信引导中学生克服诸多心理障碍的干预方法应是多样的，没有固定模式。对老师来讲加强教育理论的学习、累集干预经验将是一个数学教师永无止境的追求目标，我们会持续地坚持探索。

## 五、成果细目

### 1. 《中学生数学学习障碍的研究与应用》开题报告被收录入《如何撰写开题报告》一书

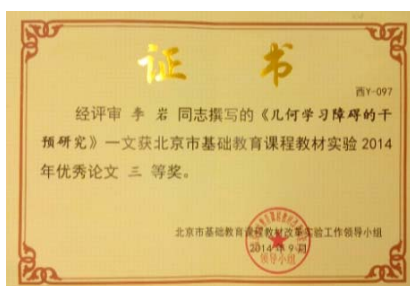


2. 关

于整体促进学生逻辑思维的教学尝试《试论命题间推出关系在中学数学中的重要地位》在核心期刊《数学通报》于 2012.09 期发表



### 3. 课题组老师撰文《几何学习障碍的干预研究》、《“好算手”教学活动的实践与认识》获市区奖励





《课堂教学中对中学生数学思维能力培养的实践与探究》 薛海龙

《通过干预提高学生审题能力的一些尝试》 李京兰

《几何综合题的解题策略研究》 李岩

《造成数学学习障碍的深层机理分析》 徐晓阳

《嘉年华活动》 王正 朱晓琳

.....

2016.8

北京市教育科学规划课题成果公报