

# 小学生数学素养评价研究

北京教育科学研究院

杜文平 黄玉凤 邓 宏 李义杰 聂凤霞  
王雅丽 穆 键 李春超 程素萍 张卫红

“数学素养”成为近年来数学教育研究中的一个热点问题，特别是国际教育评价协会（IEA）发起的第三次国际数学和科学研究（TIMSS）与世界经济与合作组织（OECD）发起的国际学生评价项目（PISA）（PISA 评价的内容之一是学生的数学素养）后，国内外研究者对基础教育中学生数学素养从概念、构成要素、评价内容等方面进行了探索。北京市教育科学“十一五”规划《小学生数学素养评价研究》课题组自2006年9月起结合北京市小学数学课程改革的实践，开始了小学生数学素养评价的研究。

## 一、研究的目标与意义

### （一）研究目标

1. 结合小学数学课程标准的要求，提高教师对数学素养的认识，正确理解小学生数学素养的涵义，将数学素养的理念融入日常教学中，从而培养学生的数学素养。
2. 促使教师掌握科学的评价方式和技能，形成一套规范的、科学合理的以及适合学生发展需要的数学素养评价标准。

### （二）研究意义

#### 1. 理论意义。

本研究能从理论层面研究数学素养的内涵、构成要素，为小学数学课程目标的达成提供理论支撑，并从数学学科角度出发构建小学生数学素养评价体系，从而丰富教育评价理论。

#### 2. 实践意义。

学生的学习是有差异的，学生的数学学习也是有差异的，如果用同一个标准去评价每一个学生，势必影响学生数学素养的全面提高和个性发展。本研究紧密结合小学数学课程改革的实践，形成一套系统、科学、能解决实际问题的评价体系，引导教师明确教学目标、优化

课程内容、改进教学策略、提高教学技巧和能力，为培养学生的数学素养提供一些思路。

## 二、研究内容与方法

### （一）研究内容

1. 小学生数学素养的构成要素及内涵研究。
2. 小学生数学素养评价指标体系研究。
3. 小学生数学素养评价方案研究。
4. 小学生数学素养评价工具研究。

### （二）研究方法

1. 文献研究法：广泛查阅国内外相关内容的理论和实践研究资料，完成本课题的理论研究，选准本课题研究起点，并在研究过程中不断提升课题研究。

2. 调查法：编制《小学生数学素养构成要素与评价——教师调查问卷》，了解小学生数学素养评价的实施现状以及为分析数学素养的构成要素进行前期准备。

3. 数理统计法：本研究采用数理统计方法比如聚类方法对数学素养的核心要素进行分析。运用分半法对评价工具进行信度检验，运用效标效度对评价工具进行效度的检验，以保证系列评价工具的科学性。

4. 行动研究法：在教育教学活动中开展研究，通过深入课堂、召开研讨会等方式研究小学生数学素养评价方案，研制小学生数学素养评价工具；一线数学教师，结合日常的教学对评价方案中涉及的内容进行检验，即在实践中验证、修改小学生数学素养评价方案和工具。

## 三、研究过程与研究结论

本研究以小学数学课程标准以及数学课程的实施为切入点开展小学生数学素养评价，并借鉴国内外评价理念及数学素养的评价理念建立适合我国国情的本土化数学素养评价体系。本研究以中、高学段为主，主要以三、五年级学生为研究对象。

### （一）小学生数学素养的构成要素及内涵研究

到底什么是数学素养？数学素养包涵哪些内容？从文献中可知学者和研究部门众说纷纭，没有一个大家公认的概念。通过文献研究、调查法以及数理统计法对数学素养的构成要素及内涵进行前期研究。

1. 研究相同概念，吸纳共同观点。

课题组通过查阅国内外文献资料，对搜集到的“数学素养”概念进行分析。这些概念

的相同点是都包含“是一个人的能力”，具体是一个什么样的能力，不同的研究成果的内容说法不一。比如，PISA 项目对数学素养的界定是：数学素养是一种个人能力，学生能确定并理解数学在社会中所起的作用，得出有充分根据的数学判断和能够有效的运用数学；作为一个有创新精神、关心他人和有思想的公民，具有适应当前及未来生活所必须的数学能力。这为本课题的研究提供了借鉴。

### 2. 研究全日制义务教育数学课程标准。

数学课程标准规定的课程目标是对学生应达到数学学业水平的要求，把握课程目标的要求是正确界定数学素养含义的关键。数学课程标准将知识与技能、数学思考、解决问题和情感与态度作为课程目标。这四个方面的目标是一个密切联系的有机整体，对人的发展具有十分重要的作用，它们是在丰富多彩的数学活动中实现的。其中，数学思考、解决问题和情感与态度的发展离不开知识与技能的学习；同时，知识与技能的学习必须以有利于其他目标的实现为前提。因此，数学课程目标为我们构建小学生数学素养概念提供了依据。

### 3. 研究小学生数学素养构成要素。

在文献研究的基础上，开展了数学素养内涵调查研究。其中让教师选择“数学素养主要包含哪些因素”，调查结果按照教师选择百分比的高低设计表 1。

由表 1 可知，除“数学交流”以外，其余的选项都超过 50%；教师选择学生数学素养超过或接近 66.7% (2/3) 的选项有数学思维能力、数学应用能力、数学知识技能、数学意识和数学情感。

表 1 数学素养构成因素调查统计表

项目	百分比	项目	百分比	项目	百分比
数学思维能力	92.6	数学情感	67.6	数学能力	57.9
数学应用能力	90.0	数学思维品质	62.2	数学观念	55.9
数学知识技能	88.0	数学思考	59.5	数学思想观念	55.2
数学意识	70.6	数学人文精神	58.5	数学交流	45.5

课题研究以调查数学素养构成要素为切入点，试图找出可以描述小学生数学素养的核心变量。在调查中发现上述 12 个变量基本上涵盖了描述学生数学素养水平的因素。但是在这么多的变量当中，有没有彼此高度相关的变量？如果没有，则这些变量均应进入数学素养核心变量；如果有，则应当进行归类、降维，选择最能描述数学素养的因素作为核心变量。

为便于对教师的选择进行归总，课题组对以上数学素养的 12 项构成因素进行聚类分析，通过聚类找出最能描述数学素养的若干变量，作为今后衡量、评价学生数学素养水平的关键指标。

聚类分析 (Cluster Analysis) 是根据事物本身的特征对研究对象进行分类的方法。研究对象属于同类的，具有较大的相似性；不同类的，差异很大，这就是聚类分析依据的基本原则。聚类分析虽不是数学素养评价指标体系的唯一研究方法，但在数学素养指标体系的构建过程中具有相当重要的意义。下面就用 Hierarchicar Cluste (分层聚类法) 进行变量筛选

(也称 R 聚类法), 分层依据取 Binary 中的简匹配 (Simple Matching)。统计结果见图 1。

Case	4 Clusters
数学知识技能	1
数学思维能力	1
数学应用能力	1
数学观念	2
数学思维品质	3
数学意识	4
数学交流	2
数学人文精神	3
数学能力	2
数学思想观念	3
数学情感	4
数学思考	4

图 1 分层聚类结果

由图 1 初步判断, 可把 12 个变量分成四类, 呈现的结果是: ①数学知识技能、数学思维能力、数学应用能力; ②数学观念、数学交流、数学能力; ③数学思维品质、数学人文精神、数学思想观念; ④数学意识、数学情感、数学思考。

专家在数据分析的基础上, 课题组内进行多次研讨, 最后把学生的数学素养构成因素界定为数学知识技能、数学能力、数学观念和数学情感四个方面。这四个构成因素, 既互相渗透、又相互不包含; 既融为一体, 又各自独立; 既互相促进, 又相互制约地发挥着推动小学生数学素养不断发展、提高、适应社会生活的能力不断增强的作用。

#### 4. 对小学生数学素养核心概念进行界定。

在研究与数学素养相同概念、全日制义务教育数学课程标准以及小学生数学素养构成要素的基础上, 运用理论思维方法通过分析、综合、推理、归纳, 课题组将小学生数学素养的概念进行了界定。“数学素养”是指一种个人能力, 即学生通过数学教育以及个体自身的实践和认识活动, 所获得的数学知识技能、数学能力、数学观念、数学情感等方面的素质, 是学生适应当前及未来生活所必须具备的一种能力。“数学素养评价”是指评价主体依据一定的标准对学生的数学知识技能、数学能力、数学观念和数学情感进行价值判断的过程。

## (二) 小学生数学素养评价指标体系研究

依据数学素养的内涵, 确立了四个子课题, 即: “小学生数学知识技能评价研究” “小学生数学能力评价研究” “小学生数学观念评价研究” 和 “小学生数学情感评价研究”。

### 1. 研究小学生数学素养评价指标体系。

小学生数学素养评价指标体系, 是按照评价对象逻辑结构所构成的有机整体。本研究中评价对象是学生的数学素养。因此, 小学生数学素养评价指标体系是由数学素养分解出的一级指标、二级指标和三级指标按照数学素养逻辑结构所构成的有机整体。

“小学生数学素养评价” 指标体系研究是本课题研究的重点, 也是难点。课题组是依据

教育部制订的“全日制义务教育数学课程标准（实验稿）”的理念、目标以及国内外对学生数学素养评价的研究，根据国内对小学生数学素养评价的现状和当前存在的影响小学生数学素养评价的问题，按照现代教育评价和数学教育理念研究制定的。主要研究步骤为：明确评价指标对象→结合调查结果，确定评价内容→提出评价指标体系初稿→筛选评价指标→编制评价工具，进行试用→进一步修改完善。

通过上述步骤形成四个子课题评价指标体系，从而形成小学生数学素养评价指标体系。小学生数学素养评价体系的一级指标4项，二级指标14项。分解到每一个子课题，一级指标3~4项，二级指标6~10项，它是一套既简便又科学的评价指标体系。如小学生数学能力评价指标体系，一级指标4项，二级指标7项。表2为子课题小学生数学能力评价指标体系。

表2 小学生数学能力评价指标体系

一级指标	二级指标	评价要素	评价方法和工具
运算能力	运算灵活性 运算简捷性	会用多种方法进行运算 能灵活运用公式、性质、法则和运算律进行简便计算	纸笔测验  情境测验  学生作业
空间想象能力	感知空间图形能力 灵活解决空间图形问题能力	能描述实物或几何图形的运动和变化 能进行立体图形和平面图形之间的转化 能灵活解决求组合图形和不规则图形的面积和体积	
数学思维能力	抽象概括能力 推理能力	多角度、多途径去探索并概括出数和图形的规律 能从若干特殊事物当中进行比较归纳出事物的特征 能寻求证据、验证或举出反例 能清晰、有条理去解决问题 能运用数学语言合乎逻辑地进行交流	
解决问题能力	解决实际问题的能力 创造性解决问题能力	将实际问题转化为数学问题 能正确列出解决该问题的算式或方程等 能提出多种解决问题的方法和思路	

## 2. 研究小学生数学素养评价标准。

小学生数学素养评价标准，是衡量小学生数学素养某一方面价值程度的尺度与标准。小学生数学素养评价标准是小学生数学评价指标体系的有机组成部分。根据不同评价指标的特点，课题组分别设计了定量评价标准、定性评价标准和定性与定量相结合的评价标准；为促进发展水平程度不同的学生都能在原有基础上能得到发展，课题组还设计了绝对评价标准、相对评价标准和个体内差异评价标准。比如，小学数学知识技能评价标准采用绝对评价、相对评价和个体内差异评价相结合的评价标准体系。绝对评价可以确定学生知识技能与客观标准的差距，根据纸笔测试解答的情况可以分为完全达标、基本达标、达标、未达标四个等级。相对评价可以确定学生在集体中的相对位置，可以根据学生平时作业情况分为优、良、及格、不及格四个等级。个体内差异评价是在充分认识学生成长环境的基础上将学生的期末

与一学期以来的情况进行比较,也可以叫做学期末评价。评价结果可以分为优秀、良好、合格、不合格四个等级。通过综合运用多个评价标准体系对学生进行评价,使不同认知水平、不同个性特点的学生都能在原有基础上得到提高,引导所有学生都充满信心地朝着各自理想的目标发展,从而体现学生发展的自主性和个性化。

### (三) 小学生数学素养评价方案研究

本课题研究制定的小学生素养评价方案,是从四个子课题入手,分别研讨四个子课题的评价方案,然后再讨论总课题评价方案。不论是总课题的评价方案还是各子课题的评价方案,其内部结构都是一个完整的整体,包括:

#### 1. 小学数学素养评价方案理论观点研究。

在每一个评价方案中对概念、评价目的、评价原则都有阐述。如小学生数学能力的评价,是指对小学生在数学学习过程中表现出来的运算能力、初步的数学思维能力、初步的空间观念与运用所学知识解决综合问题能力的程度、水平的评价。这些理论观点是评价方案的灵魂,是评价方案科学化的基本保证。

#### 2. 小学数学素养评价指标体系和标准研究。

小学生数学素养评价指标体系和标准研究是评价方案的核心,是衡量小学生数学素养评价价值水平的标志和准则。每个子课题和总课题如果没有这个标志和准则,就不可能有对应的符合实际的评价。由于它是核心在上文有单独详细说明。

#### 3. 小学数学素养评价实施研究。

评价实施是小学生数学素养评价方案的重要内容,它包括实施评价的基本条件、评价的主体、评价方法、评价的具体实施、评价结果的应用。它为小学生数学素养评价提供了组织保障和支持。

### (四) 小学生数学素养评价工具研究

依照评价方案,小学生数学素养的评价主要分为平时评价、期中评价和期末评价,并且以平时评价为主。换句话说,学生数学素养的评价以形成性评价为主,形成性评价和总结性评价相结合的原则。因此,编制、开发的工具也以搜集学生形成性评价信息和总结性评价信息为主。采用的方法主要是数理统计法对工具进行信度和效度检验。

#### 1. 研讨、设计评价工具类型。

由于小学生数学知识技能评价、小学生数学能力评价、小学生数学观念评价和小学数学情感评价四个子课题所涉及的评价内容和评价要素不同,课题组经过多次研讨,小学生数学知识技能评价、小学生数学能力评价、小学生数学观念评价三个子课题以观察记录表、纸笔测验、情景测验题为主要评价工具,小学数学情感评价以数学情感评价量表、观察记录表等为主要评价工具。

#### 2. 编制完成了系列评价工具。

课题组研究、开发小学生数学素养评价工具严格按照规范程序和方法进行。

(1) 初步拟定小学数学素养工具的样本。各子课题在进行编制工具之前，总课题组为引导课题组成员对评价指标和评价要素的理解，根据评价要素编制了相应的评价工具的样本。比如，小学数学知识技能评价工具内容的选取，是根据评价要素的要求拟定的。小学三年级数学知识技能评价工具中“概念性知识”的样本为：

概念性知识	了解概念 理解概念	能从具体事例中，知道或能举例说明对象的特征 能用语言和符号来描述对象特征 能说出相关对象之间的区别与联系
-------	--------------	--

能说出相关对象之间的区别与联系。

例：大家讨论：长方形和正方形有什么相同的地方，有什么不同的地方？

区别：长方形对边相等，正方形四个边相等。

联系：正方形是特殊的长方形。

数学情感评价子课题评价工具则以量表的形式编制。

(2) 拟定评价工具初稿。课题组成员在理解和掌握评价要素的基础上，以《数学课程标准》的要求和北京版、人教版、北师大版三个版本的《小学数学课程改革试验教材》为选取对象，根据实践经验并结合自己的教学初步编制三年级和五年级学生的系列评价工具。比如小学生数学知识技能评价中根据评价要素“能从已解决的问题中提出拓展性问题”编制的试题为“牙膏每盒9元，牙刷每把5元，套装后每盒12元。买3盒牙膏和3把牙刷至少要花多少元？提出拓展性问题：买3盒牙膏和4把牙刷呢？(P68, D5北京版)”。在编制工具过程中进一步加深对评价指标体系的理解和把握。

(3) 试用并修改评价工具。课题组成员根据编制的工具初稿，通过课堂教学和学生作业等途径进行试用，根据试用的结果来修改评价工具。这样形成一系列相对比较丰富的工具，这也为进行信度、效度检验提供前期准备。

(4) 检验评价工具的信度和效度。评价工具的信度是指用评价工具搜集到的评价信息的可靠程度，它是评价工具稳定性和可靠性的重要指标；效度是指用评价工具搜集的评价信息的准确和有效程度，它是评价工具有效性的重要指标。课题组前期进行了“如何进行信度和效度检验”的培训，按照统计检验的理论和方法进行，使得信度和效度都在0.7以上。

(5) 修改完善评价工具。通过信度和效度的检验，若达不到既定的要求，课题组采取措施进行调整、修改和完善。经过几次试测后，对评价工具进行了进一步的修改，使得评价工具的信度和效度达到一定的标准后，才可以确定下来，最后形成了三年级和五年级系列的评价工具。

## 四、研究成效与研究反思

### (一) 研究成效

1. 对“数学素养”“小学生数学素养评价”概念做了界定，为小学生数学素养评价研究奠定了理论基础。

小学生数学素养评价研究是在辩证唯物主义认识理论、现代数学教育理论、现代教育评价理论和基础教育课程改革的理念指导下进行的。通过对课题研究的内涵进行分析，我们把“数学素养”和“小学生数学素养评价”的概念作为理论研究的重点，并围绕这两个重点对小学生数学素养评价有关的一些观点进行了研究。

2. 研究、构建了小学生数学素养评价标准，形成系列小学生数学素养评价指标体系和评价标准。

课题组依据理论和实践的探索，经反复研究和论证构建了数学素养的评价体系，形成了小学生数学知识技能评价指标体系、小学生数学能力评价指标体系、小学生数学观念评价指标体系和小学生数学情感评价指标体系，同时也形成了小学生数学素养评价的指标体系。即在4个一级指标的基础上构建了14个二级指标，32个三级指标及41个评价要素。这一成果可以说是数学素养评价的一项开创性工作。

3. 研制小学生数学素养评价方案，制订了一套科学可行、规范灵活的小学生数学素养评价方案，为小学生数学素养评价提供了全面支持。

本课题研究完成了5个评价方案，即小学生数学知识技能评价方案、小学生数学能力评价方案、小学生数学观念评价方案、小学生数学情感评价方案和小学生数学素养评价方案。小学生数学素养评价方案研究的目标是制订既可行又科学，既规范又灵活，适应不同评价主体、不同评价目的要求的小学生数学素养方案。

4. 研究开发了与评价指标体系相配套的评价工具，构建了小学生数学素养评价系列工具，为小学生数学素养评价提供了方法和技术支持。

编制学生数学素养三年级、五年级系列评价工具。根据研制的评价方案，根据课程的设置，课题组成员根据每一个评价要素编制了评价工具，并在日常教学中实测、验证和修订。同时对评价工具进行信度和效度的检验，以达到研究的科学性。这些工具为教师培养学生数学素养提供了思路和依据，同时也为学生自测提供了路径。

### (二) 研究的突破点和创新点

1. 研究内容上，提升了评价的可行性和实效性。

指标体系一级评价指标每个方面都不多于4项，二级指标都在10项以内，这就大大降低了评价的工作量，从而提升了学生数学素养评价的可行性。同时把学生数学素养评价与数学教育教学融为一体，提高评价结果实效性，构建了小学生数学素养评价实施的长效机制。



## 2. 研究方法上, 突出了多样性。

本课题研究采用的主要方法有: 文献资料法、头脑风暴法、专家咨询法、实验检验法、调查法、测量法等多种方式。在进行理论研究时还运用抽象、概括、归纳、推理、判断等思维方法在调查和文献的基础上提升小学生数学素养评价的理论观点。在评价工具的信度和效度检验中运用数理统计方法, 从而保障评价工具的可信性和有效性, 为评价结果的科学化提供支持。

## 3. 研究结果上, 突出了应用性。

本课题的研究成果, 特别是数学素养的内涵界定, 经过实践被北京市基础教育课程改革学科组所吸纳。在 2007—2008 学年度基础教育课程改革数学学科监控与评价过程中, 制作了小学一至六年级, 初中一至二年级的数学测试卷, 同时 2008—2009 学年度和 2009—2010 学年度基础教育课程改革数学学科监控与评价所抽测的四年级和初中二年级数学解决问题能力, 也是按照本课题研究框架去构思、分析和运用, 从而增加了研究的实用性。

### (三) 研究反思

1. 一项课题的研究总是一个不断探索、不断改进、不断提高的过程。因此, 本课题在今后的研究工作中还需不断反思和改进, 进一步加强理论研究, 完善评价方案和评价工具, 以期更有效地指导教师教学实践, 使学生数学素养得以提升。

2. 本课题研究中并没有涉及到学生数学素养培养的途径、方式和策略研究, 虽然课题组一线教师在实践中也在探讨如何培养学生数学素养, 但不深入、不系统。本课题今后的研究重点将落在学生数学培养的策略上, 真正使前期的研究在实践中得到落实, 也真正体现一切为学生的发展服务。

3. 课题研究中不同的子课题之间差异比较大, 导致课题之间研究的进度不平衡。

(课题组成员: 黄玉凤、邓宏、李义杰、聂风霞、王雅丽、穆健、李春超、程素萍、张卫红、吴琦、魏秀霞、姜玉玲、汪俐玲、赵宁、纪琛燕等)